Corrigé de la fiche d'entraînement

Chapitre 1 : Nombres et calculs

Comment utiliser ce corrigé ?

- Compare tes réponses avec ce corrigé **sans te contenter du résultat** : regarde aussi la rédaction et les étapes.
- Si tu t'es trompé(e), cherche à quelle étape, puis **refais l'exercice sans regarder** le corrigé.
- Les encadrés orange « À retenir » rappellent les points importants de la leçon.

Exercice 1 – Multiples, diviseurs et critères de divisibilité

Sans calculatrice

1. Tableau complété :

Nombre	divisible par 2	divisible par 3	divisible par 4	divisible par 5	divisible par 9
270	oui	oui	non	oui	oui
345	non	oui	non	oui	non
1 024	oui	non	oui	non	non
2 466	oui	oui	non	non	oui
3 105	non	oui	non	oui	oui

Justifications :

- **270** se termine par 0, donc il est divisible par 2 et par 5. La somme de ses chiffres est 2 + 7 + 0 = 9, donc il est divisible par 3 et par 9. Le nombre formé par ses deux derniers chiffres est 70, qui n'est pas divisible par 4.
- **345** est impair : il n'est divisible ni par 2, ni par 4. Il se termine par 5 : il est divisible par 5. 3 + 4 + 5 = 12 : divisible par 3 mais pas par 9.
- **1 024** est pair. Ses deux derniers chiffres forment 24 = 4 × 6 : il est divisible par 4. 1 + 0 + 2 + 4 = 7 : ni par 3, ni par 9. Il se termine par 4 : pas par 5.
- **2 466** est pair. 66 n'est pas divisible par 4 (66 = 4 × 16 + 2). 2 + 4 + 6 + 6 = 18 : divisible par 3 et par 9. Il se termine par 6 : pas par 5.
- **3 105** est impair : ni par 2, ni par 4. Il se termine par 5 : divisible par 5. 3 + 1 + 0 + 5 = 9 : divisible par 3 et par 9.

> **À retenir**
> Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3 (car 9 = 3 × 3). L'inverse est faux : 345 est divisible par 3 mais pas par 9.

2. On cherche tous les produits de deux entiers égaux à 36, puis à 48 :

36 = 1 × 36 = 2 × 18 = 3 × 12 = 4 × 9 = 6 × 6

Diviseurs de 36 : **1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36**.

48 = 1 × 48 = 2 × 24 = 3 × 16 = 4 × 12 = 6 × 8

Diviseurs de 48 : **1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48**.

3. Diviseurs communs à 36 et 48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

Le plus grand diviseur commun à 36 et 48 est **12**.

4. Multiples de 6 inférieurs à 60 : 6 ; 12 ; 18 ; **24** ; 30 ; 36 ; 42 ; **48** ; 54.

Multiples de 8 inférieurs à 60 : 8 ; 16 ; **24** ; 32 ; 40 ; **48** ; 56.

(0 est aussi un multiple de 6 et de 8, car 0 = 0 × 6 = 0 × 8.)

Les multiples communs non nuls sont 24 et 48 : le plus petit multiple commun à 6 et 8 est **24**.

Exercice 2 – Nombres premiers et décomposition

Sans calculatrice

1. On cherche un diviseur autre que 1 et le nombre lui-même :

- 51 = 3 × 17 (5 + 1 = 6, divisible par 3) : 51 **n'est pas premier**.
- 53 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 : 53 **est premier**.
- 87 = 3 × 29 (8 + 7 = 15, divisible par 3) : 87 **n'est pas premier**.
- 91 = 7 × 13 : 91 **n'est pas premier**. Attention, c'est un piège classique !
- 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 : 97 **est premier**.
- 111 = 3 × 37 (1 + 1 + 1 = 3, divisible par 3) : 111 **n'est pas premier**.

On peut vérifier avec la liste du crible d'Ératosthène : seuls **53 et 97** sont premiers.

> **À retenir**
> Pour prouver qu'un nombre **n'est pas premier**, il suffit de donner un diviseur autre que 1 et lui-même.
> Pour savoir si un nombre inférieur à 100 est premier, on teste les divisions par 2, 3, 5 et 7.

2. On divise par les nombres premiers dans l'ordre (2, puis 3, puis 5, puis 7…) tant que c'est possible.

a) $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ donc $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

b) $150 = 2 \times 75 = 2 \times 3 \times 25 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$ donc $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

c) $360 = 2 \times 180 = 2 \times 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$
donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

d) 1 001 n'est divisible ni par 2, ni par 3 (1 + 0 + 0 + 1 = 2), ni par 5. On essaie 7 :
$1001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$ donc $1001 = 7 \times 11 \times 13$

3. $N = 2^3 \times 3 \times 5^2$

a) $N = 8 \times 3 \times 25 = 600$

b) La décomposition de N contient le facteur 2 **et** le facteur 5. On peut donc écrire $N = (2 \times 5) \times (2^2 \times 3 \times 5) = 10 \times 60$: N est divisible par 10.

c) $9 = 3^2$. Pour que N soit divisible par 9, sa décomposition devrait contenir au moins deux fois le facteur 3. Or elle ne le contient qu'une seule fois : N **n'est pas divisible par 9**.
Vérification : 6 + 0 + 0 = 6, qui n'est pas divisible par 9.

Exercice 3 – Fractions irréductibles

Sans calculatrice

1. $126 = 2 \times 63 = 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$ donc $126 = 2 \times 3^2 \times 7$

$180 = 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ donc $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

2. On simplifie par les facteurs communs au numérateur et au dénominateur (ici 2, 3 et 3) :

$$\frac{126}{180} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}$$

3. D'après l'exercice 2 : $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ et $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$. Les facteurs communs sont 2 et 3 :

$$\frac{84}{150} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{2 \times 7}{5 \times 5} = \frac{14}{25}$$

4. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $1001 = 7 \times 11 \times 13$ n'ont **aucun facteur premier en commun** : leur seul diviseur commun est 1.

La fraction $\frac{360}{1001}$ **est donc irréductible**.

> **À retenir**
> Une fraction est irréductible quand son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1. Avec les décompositions en facteurs premiers, on voit tout de suite les facteurs à simplifier.

Exercice 4 – Calculs avec les nombres relatifs

Sans calculatrice

1. Calculs détaillés :

$$A = -7 + 12 - (-5) = -7 + 12 + 5 = 10$$
$$B = -3{,}5 - 4{,}2 + 1{,}7 = -7{,}7 + 1{,}7 = -6$$
$$C = (-4) \times (-2{,}5) \times (-3) = 10 \times (-3) = -30$$
$$D = (-2) \times 5 - (-3) \times (-4) = -10 - 12 = -22$$
$$E = -15 + 3 \times (-4 + 7) = -15 + 3 \times 3 = -15 + 9 = -6$$
$$F = (-56) \div (-7) - 9 \times (-2) = 8 - (-18) = 8 + 18 = 26$$

> **À retenir**
> Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : $-(-5) = +5$.
> Priorités : d'abord les parenthèses, puis les multiplications et divisions, enfin les additions et soustractions.

2. Dans le produit P, on compte les facteurs négatifs : (−3), (−7), (−1), (−2) et (−5).

Il y a **5 facteurs négatifs**. 5 est un nombre impair, donc P **est négatif**.

(Pour information : $P = -840$.)

> **À retenir**
> Un produit est **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, et **négatif** s'il est **impair**.

Exercice 5 – Calculs avec des fractions

Sans calculatrice

$$G = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} + \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$
$$H = -\frac{5}{6} + \frac{7}{4} = -\frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{7 \times 3}{4 \times 3} = -\frac{10}{12} + \frac{21}{12} = \frac{11}{12}$$
$$I = \frac{14}{15} \times \frac{25}{21} = \frac{14 \times 25}{15 \times 21} = \frac{2 \times 7 \times 5 \times 5}{3 \times 5 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$$
$$J = \frac{4}{9} \div \frac{8}{15} = \frac{4}{9} \times \frac{15}{8} = \frac{4 \times 15}{9 \times 8} = \frac{4 \times 3 \times 5}{3 \times 3 \times 4 \times 2} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$
$$K = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Pour L, on calcule d'abord le numérateur et le dénominateur séparément :

$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$$L = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{2 \times 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

> **À retenir**
> Pour additionner ou soustraire deux fractions, on les met d'abord au **même dénominateur**.
> Diviser par une fraction, c'est **multiplier par son inverse**.
> Pour un produit, on décompose avant de multiplier : la simplification est beaucoup plus facile.

Exercice 6 – Puissances

Sans calculatrice

1. Une seule puissance :

$$a = 5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$$
$$b = \frac{10^8}{10^3} = 10^{8-3} = 10^5$$
$$c = (7^2)^3 = 7^{2 \times 3} = 7^6$$
$$d = 3^{-2} \times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3$$

$$e = 2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$$
$$f = \frac{10^{-4} \times 10^6}{10^{-3}} = \frac{10^2}{10^{-3}} = 10^{2-(-3)} = 10^5$$

2. Calculs :

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \qquad (-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9 \qquad -3^2 = -(3 \times 3) = -9$$

$$5^0 = 1 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$$

> **À retenir**
> Attention : $(-3)^2 = 9$ mais $-3^2 = -9$. Dans -3^2, seul le 3 est au carré, le signe « − » reste devant.

3. $(-1)^{2026} = 1$ car 2026 est **pair** : on multiplie un nombre pair de facteurs négatifs, le résultat est positif.
$(-1)^{2027} = -1$ car 2027 est **impair** : le résultat est négatif.

Exercice 7 – Notation scientifique

Calculatrice autorisée

1. Notation scientifique :

a) $45\,000\,000 = 4{,}5 \times 10^7$

b) $0{,}000\,82 = 8{,}2 \times 10^{-4}$

c) $357 \times 10^5 = 3{,}57 \times 10^2 \times 10^5 = 3{,}57 \times 10^7$

d) $0{,}06 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-2} \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-5}$

> **À retenir**
> En notation scientifique $a \times 10^n$, le nombre a doit vérifier $1 \leq a < 10$. Par exemple, 357×10^5 n'est pas une notation scientifique car 357 > 10.

2. La lumière parcourt 3×10^5 km en 1 seconde.

a) Durée = distance ÷ vitesse :

$$t = \frac{1{,}5 \times 10^8}{3 \times 10^5} = \frac{1{,}5}{3} \times 10^{8-5} = 0{,}5 \times 10^3 = 500$$

La lumière du Soleil met **500 secondes** pour arriver jusqu'à la Terre.

b) $500 = 8 \times 60 + 20$, donc 500 s = **8 min 20 s**.

3. 1 cm = 0,01 m = 10^{-2} m. On cherche combien de fois 8×10^{-6} m « rentre » dans 10^{-2} m :

$$\frac{10^{-2}}{8 \times 10^{-6}} = \frac{1}{8} \times 10^{-2-(-6)} = 0{,}125 \times 10^4 = 1\,250$$

Il faudrait aligner **1 250 globules rouges** pour obtenir 1 cm.

Exercice 8 – Racines carrées et ensembles de nombres

Sans calculatrice

1. $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$ $\quad \sqrt{144} = 12$ car $12^2 = 144$ $\quad \sqrt{0} = 0$ $\quad (\sqrt{7})^2 = 7$
2. $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

   On remarque que $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$: **la racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées**.
3. On encadre le nombre sous la racine par deux carrés parfaits consécutifs :

   a) $\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36} \quad \Leftrightarrow \quad 5 < \sqrt{30} < 6$

   b) $\sqrt{81} < \sqrt{95} < \sqrt{100} \quad \Leftrightarrow \quad 9 < \sqrt{95} < 10$

   c) $\sqrt{144} < \sqrt{150} < \sqrt{169} \quad \Leftrightarrow \quad 12 < \sqrt{150} < 13$
4. Tableau complété :

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
12	X	X	X	X	X
-5		X	X	X	X
3,7			X	X	X
$\frac{2}{3}$				X	X
$-\frac{8}{4}$		X	X	X	X
$\sqrt{36}$	X	X	X	X	X
$\sqrt{2}$					X
π					X

Remarques : $-\frac{8}{4} = -2$ est un entier relatif ; $\sqrt{36} = 6$ est un entier naturel ; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ n'est pas décimal ; $\sqrt{2}$ et π ne sont pas rationnels, ils sont seulement réels.

> **À retenir**
> Les ensembles sont emboîtés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un nombre qui appartient à un ensemble appartient aussi à tous les ensembles « plus grands ».

Exercice 9 – QCM type brevet

Sans calculatrice

Même si aucune justification n'était demandée, voici une explication pour chaque réponse.

	Réponse	Explication
1	**A**	$90 = 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$. Dans B et C, 9, 10 et 45 ne sont pas premiers.
2	**C**	1 + 2 + 8 + 7 = 18, qui est divisible par 9. (1 287 est impair et ne se termine ni par 0 ni par 5.)
3	**B**	$\frac{7}{12} + \frac{5}{8} = \frac{14}{24} + \frac{15}{24} = \frac{29}{24}$. On n'additionne pas les dénominateurs !
4	**A**	$0{,}0037 = 3{,}7 \times 10^{-3}$. B n'est pas une notation scientifique car 37 > 10.
5	**C**	$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ (trois facteurs négatifs : résultat négatif).
6	**B**	$\sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{64} \Leftrightarrow 7 < \sqrt{50} < 8$

	Réponse	Explication
7	**A**	$\frac{10^{-3}\times 10^{5}}{10^{-2}} = \frac{10^{2}}{10^{-2}} = 10^{2-(-2)} = 10^{4}$
8	**B**	$\sqrt{2}$ est irrationnel. $\frac{2}{3}$ et $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$ sont des quotients d'entiers, donc rationnels.

Exercice 10 – Problème : les bouquets

Calculatrice autorisée

1. $182 = 2 \times 91 = 2 \times 7 \times 13$
   $156 = 2 \times 78 = 2 \times 2 \times 39 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$ donc $156 = 2^2 \times 3 \times 13$
2. $182 \div 13 = 14$ et $156 \div 13 = 12$: 13 divise 182 et 156.
   Le fleuriste **peut réaliser 13 bouquets**, composés chacun de **14 roses et 12 tulipes**.
3. $182 \div 4 = 45{,}5$: 182 n'est pas divisible par 4 (sa décomposition ne contient qu'une seule fois le facteur 2).
   Il **ne peut pas** réaliser 4 bouquets en utilisant toutes ses roses.
4. Le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 182 et 156. Le plus grand diviseur commun est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions :
   $$2 \times 13 = 26$$
   Il peut réaliser au maximum **26 bouquets**. Chaque bouquet contient alors $182 \div 26 = 7$ **roses** et $156 \div 26 = 6$ **tulipes**.

Exercice 11 – Problème : la piste cyclable

Calculatrice autorisée

1. Multiples de 18 inférieurs à 100 : 18 ; 36 ; 54 ; **72** ; 90.
   Multiples de 24 inférieurs à 100 : 24 ; 48 ; **72** ; 96.
2. Inès repasse sur la ligne de départ toutes les 18 min et Malo toutes les 24 min. Ils s'y retrouvent ensemble au bout d'une durée qui est un multiple commun à 18 et 24.
   Le plus petit multiple commun non nul à 18 et 24 est 72. Or 72 min = 60 min + 12 min = 1 h 12 min.
   9 h 00 + 1 h 12 min = 10 h 12 : ils se retrouveront ensemble sur la ligne de départ à **10 h 12**.
3. Inès aura effectué $72 \div 18 = 4$ **tours** et Malo $72 \div 24 = 3$ **tours**.

Exercice 12 – Vrai ou faux ?

Sans calculatrice

1. **Faux.** Contre-exemple : 2 et 3 sont premiers, mais 2 + 3 = 5 est impair.
2. **Faux.** Contre-exemple : 12 est divisible par 3 (1 + 2 = 3), mais pas par 9 (1 + 2 = 3 n'est pas divisible par 9).
3. **Faux.** $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$: il y a une infinité de chiffres après la virgule. $\frac{2}{3}$ n'est donc pas un nombre décimal (c'est un nombre rationnel).
4. **Vrai.** $3^{10} + 3^{10} + 3^{10} = 3 \times 3^{10} = 3^1 \times 3^{10} = 3^{11}$
5. **Faux.** $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ alors que $\sqrt{25} = 5$.
6. **Vrai.** $(2 \times 10^{-3}) \times (5 \times 10^{7}) = (2 \times 5) \times (10^{-3} \times 10^{7}) = 10 \times 10^{4} = 10^{5}$

> **À retenir**
> Pour prouver qu'une affirmation est **fausse**, un seul contre-exemple suffit. Pour prouver qu'elle est **vraie**, il faut un calcul ou un raisonnement valable dans tous les cas.