Chapitre 1 : Nombres et calculs

I. Nombres entiers naturels

Définition : Les nombres entiers naturels sont les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; … On note cet ensemble $\mathbb{N}$.

1) Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.
On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = k \times b$. On dit alors que b est un diviseur de a, ou encore que b divise a.

Exemple 1 :

1. Donner les 8 premiers multiples de 4.
   4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32.
2. Donner les 5 premiers multiples de 6.
   6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30.
3. Quels sont les multiples communs à 4 et 6 parmi les listes données précédemment ?
   12 et 24.
4. Quel est le Plus Petit Commun Multiple à 4 et 6 ?
   12.

Exemple 2 :

1. Trouve tous les diviseurs du nombre 20.
   1, 2, 4, 5, 10, 20.
2. Écris la liste des diviseurs de 16.
   1, 2, 4, 8, 16.
3. Quels sont les diviseurs communs à 16 et 20 ?
   1, 2 et 4.
4. Quel est le Plus Grand Diviseur Commun à 16 et 20 ?
   4.

Propriété : Critères de divisibilité
Un nombre entier est divisible par :

- 2 s'il est pair ;
- 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

2) Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre entier positif qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier.

Exemple : 7 est un nombre premier car il a pour diviseurs uniquement 1 et 7.

Propriété : Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : Crible d'Ératosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Donc les nombres premiers inférieurs à 100 sont :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

3) Décomposition en produit de facteurs premiers

Définition : Tous les nombres entiers naturels supérieur ou égal à 2 s'écrivent sous la forme d'un produit de nombres premiers : on appelle ce produit décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemples :

- Décomposer 42 et 100 en produit de facteurs premiers :

42 | 2 21 | 3 7 | 7 1 | $42 = 2 \times 3 \times 7$	100 | 2 50 | 2 25 | 5 5 | 5 1 | $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

- Décomposer 420 et 3465 en produit de facteurs premiers :

420 | 2 210 | 2 105 | 3 35 | 5 7 | 7 1 | $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	3465 | 3 1155 | 3 385 | 5 77 | 7 11 | 11 1 | $3465 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

II. Nombres entiers relatifs

Définition : Les nombres entiers relatifs sont l'ensemble des entiers naturels et des nombres entiers négatifs. On note cet ensemble $\mathbb{Z}$.

Définition : Un nombre relatif est formé d'un signe, $+$ ou $-$, et d'un nombre appelé distance à zéro.

Exemple :

- $3{,}6 = +3{,}6$. Ce nombre a pour signe + et pour distance à zéro $3{,}6$.
- -2. Ce nombre a pour signe – et pour distance à zéro 2.

Rappels sur les opérations avec les nombres relatifs :

1. Addition et soustraction

• Pour **additionner** deux nombres relatifs :
– Si les nombres ont le **même signe** :
on additionne leurs distances à zéro et on garde le signe commun.

Exemples : • $3{,}4 + 2{,}5 = 5{,}9$
• $-3{,}4 + (-2{,}5) = -5{,}9$

– Si les nombres sont de **signes contraires** :
on soustrait leurs distances à zéro et on garde le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples : • $3{,}4 + (-2{,}5) = 0{,}9$
• $-3{,}4 + 2{,}5 = -0{,}9$

• Pour **soustraire** un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Exemples : • $3{,}4 - (-2{,}5) = 3{,}4 + 2{,}5 = 5{,}9$
• $-3{,}4 - 2{,}5 = -3{,}4 + (-2{,}5) = -5{,}9$

• On peut changer l'ordre des termes d'une somme mais on ne peut pas changer l'ordre des termes d'une différence.

Exemples : • $3{,}4 + (-2{,}5) = -2{,}5 + 3{,}4 = 0{,}9$
• $-3{,}4 - 2{,}5 = -5{,}9$
• $2{,}5 - (-3{,}4) = 5{,}9$
donc $2{,}5 - (-3{,}4) \neq -3{,}4 - 2{,}5$

2. Multiplication et division

• **Règle des signes**
– Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de **même signe** est **positif**.
– Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de **signes contraires** est **négatif**.

• Pour **multiplier** deux nombres relatifs :
on applique la règle des signes et on multiplie les distances à zéro.

Exemples : • $-4 \times (-2{,}5) = 4 \times 2{,}5 = 10$
• $4 \times (-2{,}5) = -4 \times 2{,}5 = -10$

• Pour **diviser** deux nombres relatifs :
on applique la règle des signes et on divise les distances à zéro.

Exemples : • $\frac{-3{,}4}{-2} = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7$ • $\frac{3{,}4}{-2} = -1{,}7$

III. Nombres décimaux

Définition : Les nombres décimaux sont l'ensemble des nombres entiers relatifs et des nombres qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule. On note cet ensemble $\mathbb{D}$.

Exemple : Parmi les nombres suivants, quels sont les nombres décimaux :

- 5 : 5 est un nombre entier, c'est donc un nombre décimal.
- $\frac{1}{5} : \frac{1}{5} = 0{,}2$. Il y a un nombre fini de chiffres après la virgule, c'est donc un nombre décimal.
- $\frac{2}{3} : \frac{2}{3} \approx 0{,}66666 \ldots$ C'est donc pas un nombre décimal.

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier naturel non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$$

Propriété : Soit a un nombre relatif et n un entier relatif non nul.
a^{-n} désigne l'inverse de a^n, autrement dit :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriété : Soient a et b deux nombres relatifs non nuls et n et p deux entiers relatifs.

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n\times p}$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Définition : La notation scientifique d'un nombre différent de 0 est la seule écriture qui est de la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$;
- n est un nombre entier relatif.

Exemple : Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 431{,}6 = 4{,}316 \times 10^2$
$B = 73 = 7{,}3 \times 10^1$
$C = 0{,}0041 = 4{,}1 \times 10^{-3}$
$D = 83 \times 10^3 = 8{,}3 \times 10^4$

IV. Nombres rationnels

1) Fractions irréductibles

Définition : Les nombres rationnels sont l'ensemble des nombres s'écrivant $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux nombres entiers relatifs avec b non nul. On note cet ensemble $\mathbb{Q}$.

Remarque : L'ensemble des nombres décimaux sont des nombres rationnels. Attention, la réciproque est fausse ! Par exemple, $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel mais n'est pas un nombre décimal.

Remarque : L'écriture d'un nombre rationnel sous forme de fraction n'est pas unique. Par exemple,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \cdots$$

Définition : Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur en commun autre que 1.

Exemple : On veut rendre irréductible la fraction $\frac{210}{660}$.

a. Décomposer 210 et 660 en produit de facteurs premiers.

210 | 2 105 | 3 35 | 5 7 | 7 1 | $210 = 2\times3\times5\times7$	660 | 2 330 | 2 165 | 3 55 | 5 11 | 11 1 | $660 = 2\times2\times3\times5\times11$

b. Rendre la fraction $\frac{210}{660}$ irréductible.

$$\frac{210}{660} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11} = \frac{7}{2 \times 11} = \frac{7}{22}$$

2) Opérations avec les nombres rationnels

Addition et soustraction :

• Pour **additionner** (ou **soustraire**) des nombres rationnels en écriture fractionnaire de **même dénominateur** :
– on additionne (ou soustrait) les **numérateurs** ;
– on conserve le **dénominateur commun**.
a, b et c désignent des nombres, $c \neq 0$.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples : • $\frac{8}{5} + \frac{9}{5} = \frac{8+9}{5} = \frac{17}{5}$

• $\frac{8}{5} - \frac{9}{5} = \frac{8-9}{5} = -\frac{1}{5}$

• Pour **additionner** (ou **soustraire**) des nombres rationnels en écriture fractionnaire de **dénominateurs différents** :
– on commence par les écrire avec le même dénominateur : on dit qu'on les **réduit au même dénominateur** ;
– on applique la règle de calcul ci-contre.

Exemples : • $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{3}{4} + \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{3}{4} + \frac{10}{4} = \frac{13}{4}$

• $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} - \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$

Multiplication et division :

• Pour **multiplier** des nombres rationnels en écriture fractionnaire :
– on multiplie les **numérateurs** entre eux ;
– on multiplie les **dénominateurs** entre eux.
a, c, b et d désignent des nombres, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

En particulier $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

Exemples : • $\frac{7}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{5 \times 4} = \frac{21}{20}$

• $-2 \times \frac{-7}{5} = \frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$

• L'**inverse** d'un nombre relatif $x \neq 0$ est $\frac{1}{x}$.
L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$.
• Diviser par un nombre rationnel différent de 0 revient à **multiplier par son inverse**.

Exemples : • $\frac{7}{5} : \frac{3}{4} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{7 \times 4}{5 \times 3} = \frac{28}{15}$

• $\frac{-4}{9} : \frac{4}{3} = \frac{-4}{9} \times \frac{3}{4} = -\frac{4 \times 3}{3 \times 3 \times 4} = -\frac{1}{3}$

V. Nombres réels

Les nombres réels sont l'ensemble des nombres rationnels et d'autres nombres appelés irrationnels, tels que π ou $\sqrt{2}$. On note cet ensemble $\mathbb{R}$.

Définition : Soit a un nombre réel positif. On appelle racine carrée de a l'unique nombre positif dont le carré vaut a. On le note $\sqrt{a}$.

Exemples :

- $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$.
- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.

Propriété : Liste des premiers carrés parfaits (À RETENIR PAR CŒUR)

$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$

Exemple : Sans calculatrice, donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\sqrt{70}$.

$$\sqrt{64} < \sqrt{70} < \sqrt{81}$$
$$\Leftrightarrow 8 < \sqrt{70} < 9$$