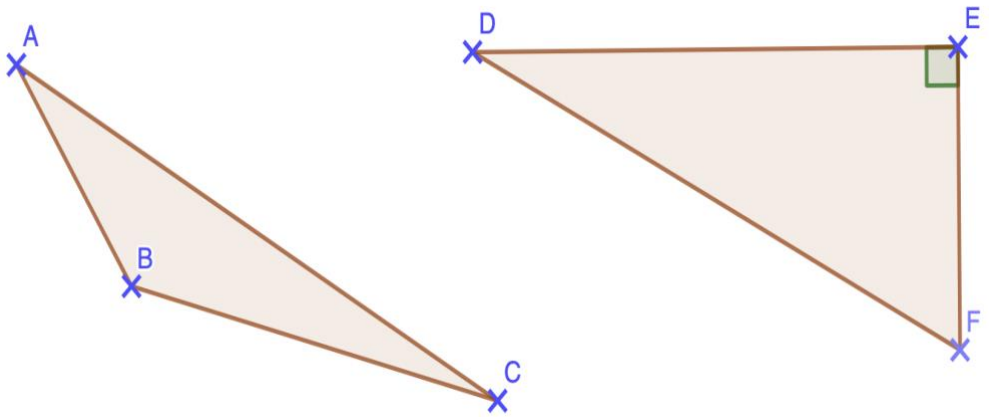
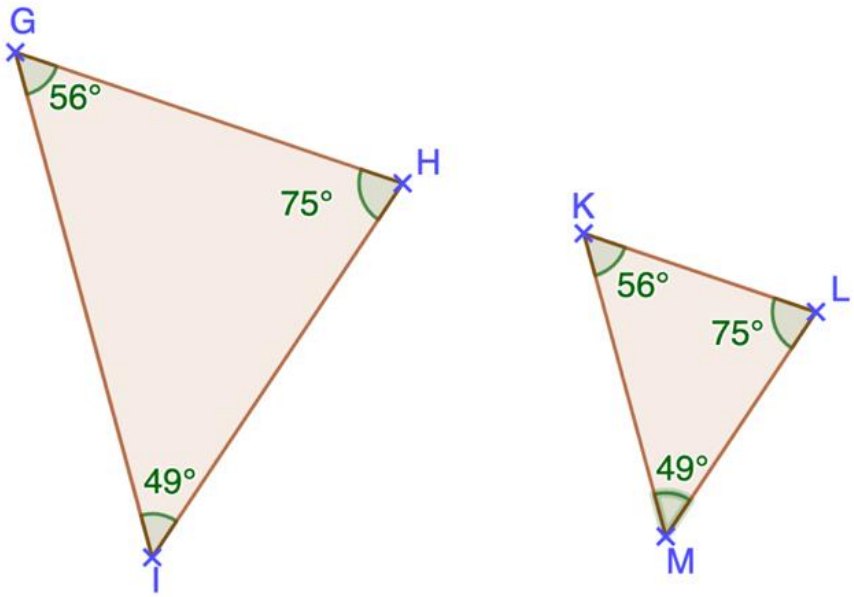
Chapitre 2 : Agrandissement et réduction

I. Triangles semblables

Définition : On dit que deux triangles sont semblables s'ils ont des angles deux à deux égaux. Ces deux angles égaux sont alors appelés angles homologues.

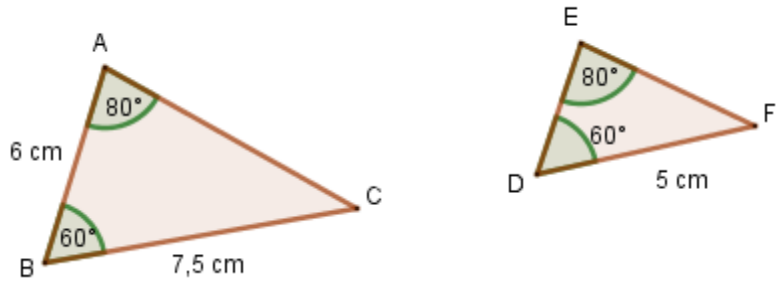
Exemple :

<table>
<tr>
<td>Les triangles ABC et DEF ne sont pas semblables.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Les triangles GHI et KLM sont semblables.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Propriété : Si deux triangles ont deux de leurs angles homologues égaux, alors ce sont des triangles semblables.

Propriété : Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés sont proportionnels.

Exemple : Calculer la longueur DE.



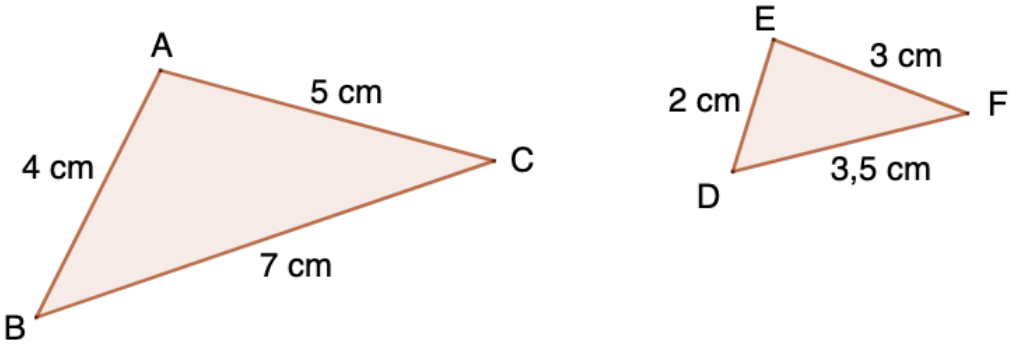
Les triangles ABC et DEF ont deux de leurs angles homologues égaux, donc ils sont semblables. On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

Côtés du triangle ABC	AB = 6 cm	AC =	BC = 7,5 cm
Côtés homologues	DE = ?	EF =	DF = 5 cm

$$DE = \frac{AB \times DF}{BC} = \frac{6 \times 5}{7{,}5} = 4\ cm$$

Propriété : Si deux triangles ont des côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Exemple : Les triangles ABC et DEF sont-ils semblables ?



Côtés du triangle ABC	AB = 4 cm	AC = 5 cm	BC = 7 cm
Côtés homologues	DE = 2 cm	EF = 3 cm	DF = 3,5 cm

$$\frac{DE}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{EF}{AC} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \frac{DF}{BC} = \frac{3{,}5}{7} = \frac{1}{2}$$

Le tableau obtenu n'est pas un tableau de proportionnalité, donc les triangles ne sont pas semblables.

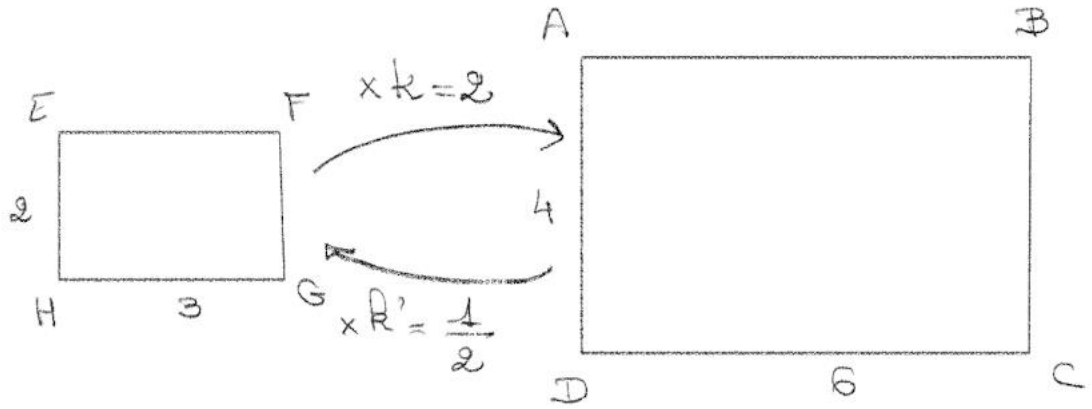
II. Agrandissement/réduction

Définition : On dit qu'une figure A est un agrandissement ou une réduction d'une figure B si les longueurs de la figure A sont obtenues en multipliant toutes les longueurs de la figure B par le même nombre strictement positif k.

- Si $k > 1$, alors A est un agrandissement de B.
- Si $k < 1$, alors A est une réduction de B.
- Si $k = 1$, alors c'est une reproduction.

k est appelé le rapport ou le coefficient d'agrandissement (ou de réduction).

Exemple :



Le rectangle ABCD est un agrandissement du rectangle EFGH de rapport 2.
Le rectangle EFGH est une réduction du rectangle ABCD de rapport $\frac{1}{2}$.

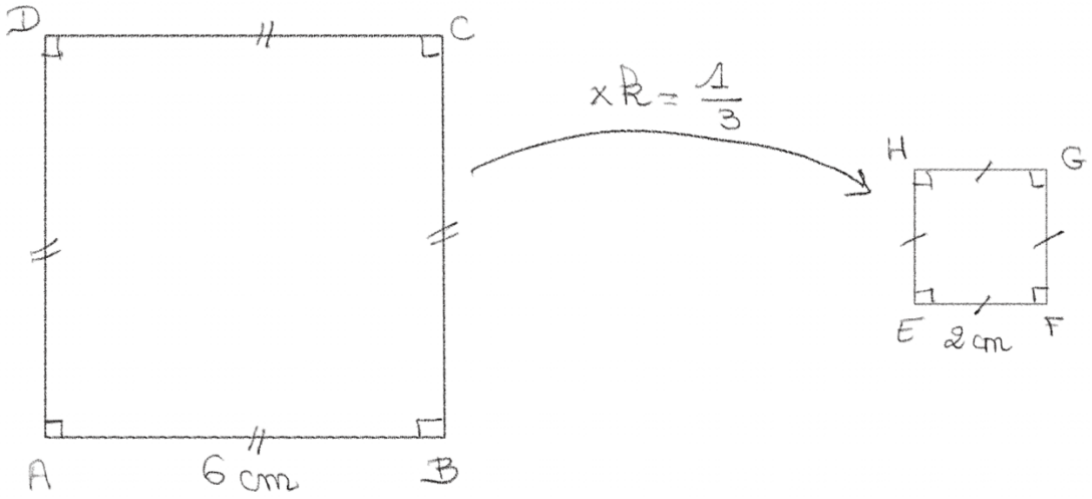
Remarque : Si la figure A est un agrandissement de la figure B de rapport k, alors la figure B est une réduction de la figure A de rapport $\frac{1}{k}$.

Propriété : Lors d'un agrandissement/une réduction, les mesures des angles restent inchangées.

III. Effet d'un agrandissement réduction/réduction sur les aires et les volumes

Propriété : Lors d'un agrandissement/une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2.

Exemple :

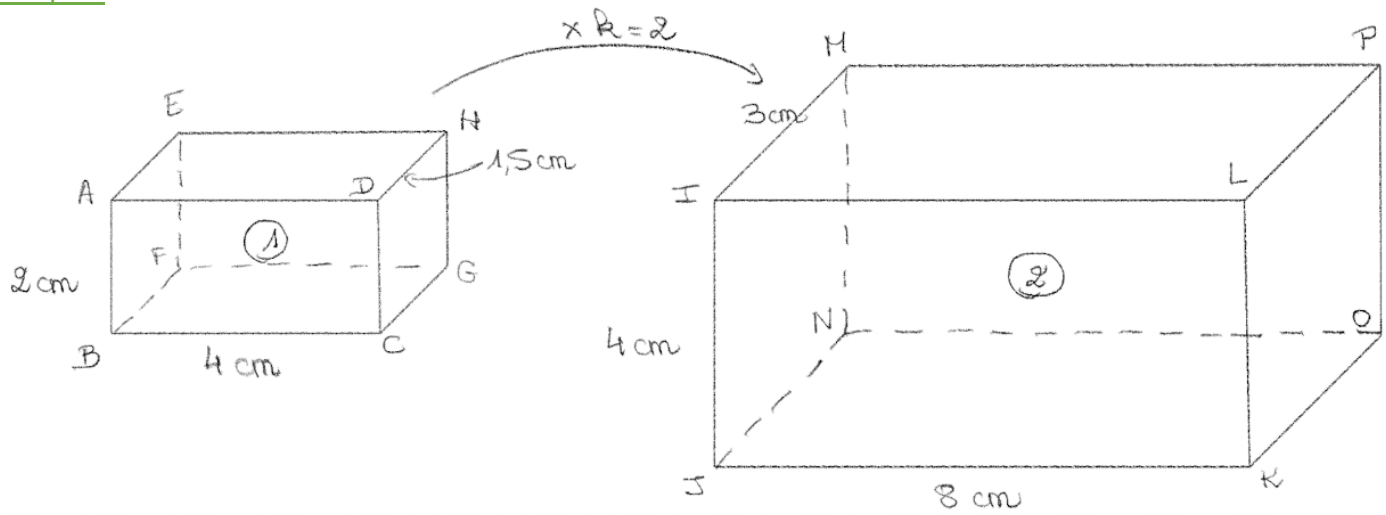


EFGH est une réduction de ABCD de rapport $\frac{1}{3}$.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 6 \times 6 = 36\ cm^2 \text{ et } \mathcal{A}_{EFGH} = \mathcal{A}_{ABCD} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = 4\ cm^2.$$

Propriété : Lors d'un agrandissement/une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k^3.

Exemple :



$\mathcal{V}_1 = 2 \times 4 \times 1{,}5 = 12\ cm^3$
$\mathcal{V}_2 = 4 \times 8 \times 3 = 96\ cm^3$
Or $12 \times 2^3 = 96$ donc $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \times 2^3$